

Максим Семенихин

СТЕРЕОМЕТРИЯ: МЕТОД КООРДИНАТ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

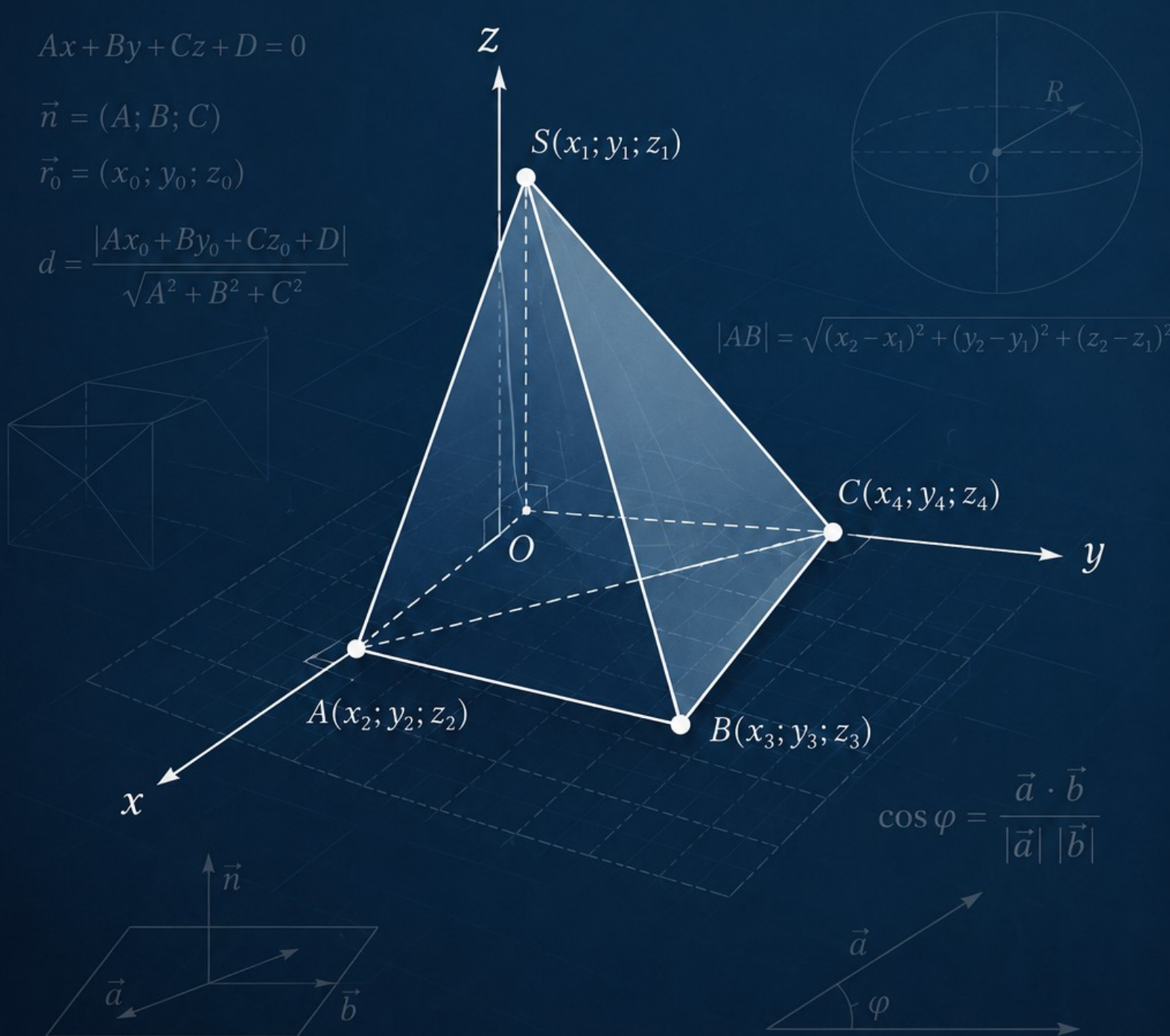
$$\vec{n} = (A; B; C)$$

$$\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$



Содержание

Раздел 1. Алгоритмы и примеры решения задач

Угол между скрещивающимися прямыми	3
Решение систем с тремя неизвестными	4
Составление уравнения плоскости	5
Угол между плоскостями	6
Угол между прямой и плоскостью	7
Расстояние между точкой и плоскостью	8
Расстояние между скрещивающимися прямыми	9

Раздел 2. Задачник на готовых чертежах

Часть 1. Координаты точки, не лежащей в узлах сетки	10
Часть 2. Квадраты, прямоугольники. Точки, лежащие на диагонали	11
Часть 3. Треугольники - равносторонний, равнобедренный, прямоугольный...	12
Часть 4. Ромбы и шестиугольники	13
Часть 5. Координаты точек в пространстве. Куб	14
Часть 6. Координаты точек и векторов в пространстве. Призмы и пирамиды ..	15
Часть 7. Угол между скрещивающимися прямыми - 1	16
Часть 8. Угол между скрещивающимися прямыми - 2	17
Часть 9. Угол между плоскостями - 1	18
Часть 10. Угол между плоскостями - 2	19
Часть 11. Угол между прямой и плоскостью	20
Часть 12. Расстояние от точки до плоскости - 1	21
Часть 13. Расстояние от точки до плоскости - 2	22
Часть 14. Расстояние между скрещивающимися прямыми	23

Раздел 3. Ответы и указания к задачам

Ответы	24
--------------	----

Алгоритм нахождения угла между скрещивающимися прямыми методом координат

1. Каждая из двух прямых задаётся двумя точками. Первым делом надо ввести систему координат и найти координаты этих точек (всего точек четыре: две задают первую прямую, и две - вторую).
2. Затем нужно найти координаты двух векторов – один будет лежать на первой прямой, другой на второй.

Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть координаты начала

3. По координатам нужно найти модули (длины) векторов.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

4. Затем нужно найти скалярное произведение этих векторов.

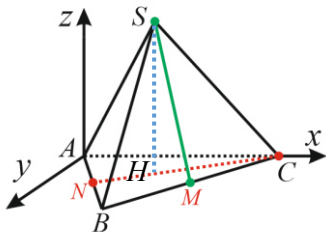
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

5. Для нахождения косинуса угла между прямыми нужно воспользоваться формулой

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Пример решения задачи по алгоритму

3. $SABC$ - правильный тетраэдр. Найдите угол между прямыми CN и SM (M, N - середины рёбер).



1) Нам нужны координаты точек S, M, N, C . Примем ребро тетраэдра за a . $A(0; 0; 0)$; $C(a; 0; 0)$; $B(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0)$. $y_B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, т.к. это высота равностороннего треугольника ABC . Точка N – середина AB , её координаты находим по формуле координат середины отрезка: $N(\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 0)$. Точка M – середина BC , её координаты находим аналогично: $M(\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 0)$.

Если в пирамиде провести высоту SH , то точка H будет центром равностороннего треугольника ABC , и $CH = BH = \frac{2}{3}h_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $NH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Значит, $H(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; 0)$. Из прямоугольного треугольника SHC как следствие из теоремы Пифагора, $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Значит, $S(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$.

2) $\vec{CN} = (-\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 0)$; $\vec{SM} = (\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$

3) $|\vec{CN}| = \sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{16} + 0} = \sqrt{\frac{12a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (можно было и не через векторы, а просто по формуле высоты равностороннего треугольника). В случае с $|\vec{SM}|$ так и сделаем: SM – высота равностороннего треугольника SBC со стороной a , поэтому $|\vec{SM}| = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4) $|\vec{CN}| \cdot |\vec{SM}| = -\frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} + 0 = -\frac{a^2}{8}$

5) $\cos \varphi = \frac{|\frac{-a^2}{8}|}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a^2}{8} : \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{6}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{6}$.

Алгоритм решения системы из трёх уравнений с тремя неизвестными (дополнительный). Метод Гаусса, но без матриц

0. Этот алгоритм понадобится только в крайнем случае, в большинстве задач системы решаются проще. Но к крайнему случаю нужно быть готовым, если что. Также для понимания того, что написано ниже, нужно уметь решать обычные системы с двумя неизвестными (7 класс) методами сложения и подстановки.

-
1. Рассмотреть первые два уравнения системы и избавиться от третьей буквы (z) методом сложения. Получится уравнение №1 с двумя неизвестными.
 2. Рассмотреть первое и третье (или второе и третье) уравнения и сделать то же самое – избавиться от третьей буквы (z) методом сложения. Получится уравнение №2 с двумя неизвестными – x и y .
 3. Объединить уравнения №1 и №2 в одну систему и решить эту систему.
 4. Найти третью неизвестную z , подставив в любое исходное уравнение найденные x и y .

Пример решения системы уравнений по алгоритму

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1, \\ 2x - 7y + 2z = -3, \\ x + 5y + 3z = 9. \end{cases}$$

1. Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым (чтобы избавиться от переменной z):

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y - 4z & = & 1 \quad (\text{первое уравнение с } "-4z") \\ 4x - 14y + 4z & = & -6 \quad (\text{второе, умноженное на 2, с } "+4z") \\ \hline 7x - 12y & = & -5 \quad (\text{складываем и получаем уравнение №1 без } "z") \end{array}$$

2. Умножим второе уравнение на 3, а третье на -2 и сложим (чтобы избавиться от переменной z):

$$\begin{array}{rcl} 6x - 21y + 6z & = & -9 \quad (\text{второе, умноженное на 3, с } "+6z") \\ -2x - 10y - 6z & = & -18 \quad (\text{третье, умноженное на } "-2", \text{ с } "-6z") \\ \hline 4x - 31y & = & -27 \quad (\text{складываем и получаем уравнение №2 без } "z") \end{array}$$

3. Объединим в систему уравнения №1 и №2, решим эту систему (например, методом сложения):

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 7x - 12y = -5 \\ 4x - 31y = -27 \end{cases} \cdot \begin{matrix} 4 \\ (-7) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 28x - 48y = -20 \\ -28x + 217y = 189 \end{cases} \\ \hline 169y = 169 \\ y = 1 \\ 7x - 12y = -5 \\ 7x - 12 \cdot 1 = -5 \\ 7x = 7 \\ x = 1 \end{array}$$

4. Итак, мы нашли, что $x = 1$, $y = 1$. Теперь осталось подставить эти значения в любое из исходных уравнений системы (возьмём первое), чтобы найти z .

$$\begin{array}{l} 3x + 2y - 4z = 1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 4z = 1 \\ -4z = -4 \\ z = 1 \end{array}$$

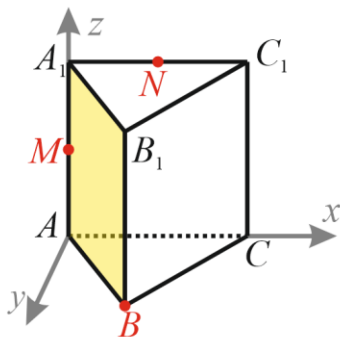
Ответ: (1; 1; 1).

Алгоритм составления уравнения плоскости (без матриц)

0. Уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – некоторые числа, которые нам и нужно будет найти, чтобы в дальнейшем подставить в нужную формулу.
1. Если плоскость проходит через начало координат, это сразу означает, что $D = 0$. Если не проходит, то $D \neq 0$ (можно взять любым ненулевым, пока неизвестны остальные коэффициенты). Рекомендуется принимать $D = 1$. Оформляем: «Плоскость проходит через начало координат, $D = 0$ » или «Плоскость не проходит через начало координат, поэтому $D \neq 0$. Примем $D = 1$ ».
2. Плоскость всегда задаётся тремя точками. Нужно найти координаты этих точек.
3. Найденные координаты точек нужно подставить вместо x, y, z в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Получится система из трёх уравнений (каждая точка – одно уравнение).
 - Не забываем, что D нам уже известно из п.2.
 - Подставлять нужно не вместо A, B, C , а вместо x, y, z !
4. Решаем систему и получаем уравнение плоскости.
 - Если после подстановки и решения остаются 2 неизвестных значения, одно из них выбираем произвольно (так, чтобы было удобно), а второе считаем.
5. Частные случаи:
 - Уравнение плоскости XOY : $z = 0$, то есть, $0x + 0y + 1z + 0 = 0$ ($A = B = D = 0, C = 1$)
 - Уравнение плоскости XOZ : $y = 0$, то есть, $0x + 1y + 0z + 0 = 0$ ($A = C = D = 0, B = 1$)
 - Уравнение плоскости YOZ : $x = 0$, то есть, $1x + 0y + 0z + 0 = 0$ ($B = C = D = 0, A = 1$)

Примеры составления уравнений плоскостей по алгоритму

Все рёбра правильной треугольной призмы равны 2, M и N – середины рёбер. Составьте уравнение плоскостей BMN , ABB_1 и ABC .



Составим уравнение плоскости BMN .

- 1) Плоскость BMN явно и очевидно не проходит через начало координат (точку A), поэтому $D \neq 0$. Принимаем $D = 1$.
- 2) Координаты точек B, M и N : $B(1; \sqrt{3}; 0)$; $M(0; 0; 1)$; $N(1; 0; 2)$. Если непонятно, откуда взялись эти загадочные числа, стоит порешать сборник сначала.
- 3) Подставляем координаты точек в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, помня, что $D = 1$:
$$\begin{array}{l} B: 1A + \sqrt{3}B + 0C + 1 = 0 \\ M: 0A + 0B + 1C + 1 = 0 \\ N: 1A + 0B + 2C + 1 = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{или, по-человечески,} \\ A + B\sqrt{3} + 1 = 0 \\ C + 1 = 0 \\ A + 2C + 1 = 0 \end{array} \right.$$
- 4) Из второго уравнения сразу находим, что $C = -1$, затем, подставляя это в третье уравнение, находим, что $A = 1$, и подставляя A в первое уравнение, находим, что $B = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Итак, уравнение плоскости (ответ):

$1x - \frac{2}{\sqrt{3}}y - 1z + 1 = 0$ (или $x - \frac{2}{\sqrt{3}}y - z + 1 = 0$). Это уравнение можно домножить на $\sqrt{3}$, чтобы избавиться от знаменателя. Получим: $\sqrt{3}x - 2y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$. Домножение не обязательно, но оно может быть удобным для дальнейшего решения.

Составим уравнение плоскости ABB_1 .

- 1) Эта плоскость проходит через точку A (начало координат), поэтому $D = 0$.
- 2) Точки, задающие плоскость: B, B_1, A . Их координаты: $B(1; \sqrt{3}; 0)$; $B_1(1; \sqrt{3}; 2)$; $A(0; 0; 0)$. Координаты точки A подставлять не будем, её мы использовали, когда выяснили, что $D = 0$.
- 3) и 4) Подставляем значения координат в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, помня, что $D = 0$:
$$\begin{array}{l} B: 1A + \sqrt{3}B + 0C = 0 \\ B_1: 1A + \sqrt{3}B + 2C = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{или} \\ A + B\sqrt{3} = 0 \\ A + B\sqrt{3} + 2C = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C = 0, B = -\frac{A}{\sqrt{3}}.$$
 Осталось два неизвестных значения, выбираем одно из них произвольно. Удобно выбрать $A = \sqrt{3}$, тогда $B = -1$ (т. к. $B = -\frac{A}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$).

Итак, уравнение плоскости (ответ): $\sqrt{3}x - 1y + 0z + 0 = 0$ (или $\sqrt{3}x - y = 0$).

Составим уравнение плоскости ABC .

Это плоскость XOY , поэтому её уравнение $z = 0$, или же $0x + 0y + 1z + 0 = 0$.

Алгоритм нахождения угла между плоскостями

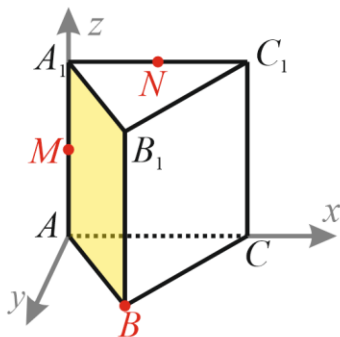
1. Составить уравнения обеих плоскостей.
2. Если уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\vec{n}(A; B; C)$ перпендикулярен (или, как ещё говорят, «нормален») к данной плоскости. Нужно из уравнения каждой плоскости выписать координаты вектора-нормали к ней.

А, чтобы найти угол между плоскостями, достаточно найти угол между векторами, им перпендикулярными.

3. Значит, нужно просто найти угол между прямыми, содержащими векторы $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ – перпендикулярный к первой плоскости – и $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ – перпендикулярный ко второй плоскости. Формула та же: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$, алгоритм тот же, что и при нахождении угла между прямыми.

Пример решения задачи с помощью алгоритма

Все рёбра правильной треугольной призмы равны 2, M и N – середины рёбер. Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .



- 1) Составляем уравнения плоскостей (подробно см. лист «Алгоритм составления уравнения плоскости»)

Уравнение плоскости BMN (составлено выше):

$1x - \frac{2}{\sqrt{3}}y - 1z + 1 = 0$ (или $x - \frac{2}{\sqrt{3}}y - z + 1 = 0$). Это уравнение можно домножить на $\sqrt{3}$, чтобы избавиться от знаменателя. Получим: $\sqrt{3}x - 2y - \sqrt{3}z + \sqrt{3} = 0$. Домножение не обязательно, но оно может быть удобным для дальнейшего решения.

Уравнение плоскости ABB_1 (также составлено выше):

$\sqrt{3}x - 1y + 0z + 0 = 0$ (или $\sqrt{3}x - y = 0$).

- 2) Координаты нормалей к плоскостям

Координаты вектора-нормали к BMN : $\vec{n}_1(\sqrt{3}; -2; -\sqrt{3})$.

Координаты вектора-нормали к ABB_1 : $\vec{n}_2(\sqrt{3}; -1; 0)$.

- 3) Угол между векторами-нормальными

Модули векторов:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + 0^2} = 2$$

Скалярное произведение векторов:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (-2) \cdot (-1) + (-\sqrt{3}) \cdot 0 = 5$$

Косинус угла между векторами-нормальными (и между исходными плоскостями):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|5|}{\sqrt{10} \cdot 2} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Примечание. Можно было оставить $\arccos \frac{5}{2\sqrt{10}}$.

Алгоритм нахождения угла между прямой и плоскостью

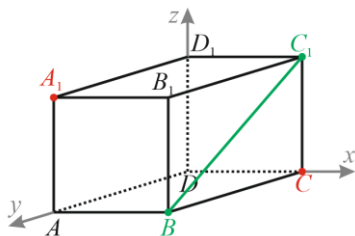
1. Составить уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор нормали к ней будет $\vec{n}(A, B, C)$.
2. Определить координаты хотя бы двух точек принадлежащих прямой, ввести вектор с концами в этих точках. Пусть это будет вектор $\vec{a}(x; y; z)$.
 - x, y, z – это не координаты какой-то точки, это уже «готовые» координаты вектора
3. Воспользоваться формулой для нахождения синуса угла между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$$

- Обратите внимание, что здесь вместо косинуса (как в предыдущих формулах) стоит синус. Здесь всё верно: мы находим косинус угла *между прямой и нормалью*, который равен синусу угла *между прямой и плоскостью*.

Пример решения задачи с помощью алгоритма

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB = 6$, $BC = 15$, $AA_1 = 8$. Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 .



- 1) Составим уравнение плоскости $A_1 BC$ и выпишем вектор нормали.

$A_1(0; 15; 8); B(6; 15; 0); C(6; 0; 0)$. Подставим эти координаты вместо x, y, z в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Плоскость не проходит через начало координат, поэтому $D \neq 0$. Примем $D = 1$:

$$\begin{array}{l} A_1: 0A + 15B + 8C + 1 = 0 \\ B: 6A + 15B + 0C + 1 = 0 \\ C: 6A + 0B + 0C + 1 = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{или, по-человечески,} \\ 15B + 8C + 1 = 0 \\ 6A + 15B + 1 = 0 \\ 6A + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Находим, что $A = -\frac{1}{6}, B = 0, C = -\frac{1}{8}$. Таким образом, уравнение плоскости: $-\frac{1}{6}x + 0y - \frac{1}{8}z + 1 = 0$. Уравнение можно домножить на НОК(6; 8) = 24, чтобы коэффициенты стали целыми. Получим: $-4x + 0y - 3z + 24 = 0$. Тогда вектор нормали будет $\vec{n}(-4, 0, -3)$.

- 2) Введем вектор $\vec{BC_1}: B(6; 15; 0); C_1(6; 0; 8)$. Тогда $\vec{BC_1}(0; -15; 8)$.

- 3) Воспользуемся формулой для нахождения синуса искомого угла.

Модули векторов:

$$\begin{aligned} |\vec{n}| &= \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5 \\ |\vec{BC_1}| &= \sqrt{0^2 + (-15)^2 + 8^2} = 17 \end{aligned}$$

Скалярное произведение:

$$\vec{n} \cdot \vec{BC_1} = -4 \cdot 0 + 0 \cdot (-15) + (-3) \cdot 8 = -24$$

Синус угла между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BC_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{BC_1}|} = \frac{|-24|}{5 \cdot 17} = \frac{24}{85}$$

Ответ: $\arcsin \frac{24}{85}$.

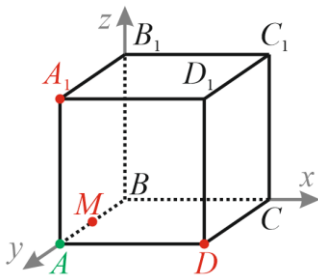
Алгоритм нахождения расстояния между точкой и плоскостью

1. Определить координаты точки $M(x_M, y_M, z_M)$.
2. Составить уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.
3. Воспользоваться формулой расстояния от точки до плоскости:

$$\rho = \frac{|A \cdot x_M + B \cdot y_M + C \cdot z_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример решения задачи по алгоритму

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб с ребром 1, M - середина AB .
Найдите расстояние от точки A до плоскости $A_1 DM$.



1) Определим координаты точки A : $(0; 1; 0)$.

2) Составим уравнение плоскости $A_1 DM$.

$A_1(0; 1; 1); M(0; \frac{1}{2}; 0); D(1; 1; 0)$. Подставим эти координаты вместо x, y, z в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Плоскость не проходит через начало координат, поэтому $D \neq 0$. Примем $D = 1$:

$$\begin{array}{l|l} A_1: 0A + 1B + 1C + 1 = 0 & \text{или, по-человечески,} \\ M: 0A + \frac{1}{2}B + 0C + 1 = 0 & \begin{cases} B + C + 1 = 0 \\ \frac{1}{2}B + 1 = 0 \\ A + B + 1 = 0 \end{cases} \\ D: 1A + 1B + 0C + 1 = 0 & \end{array}$$

Находим, что $B = -2, C = 1, A = 1$. Таким образом, уравнение плоскости: $1x - 2y + 1z + 1 = 0$.

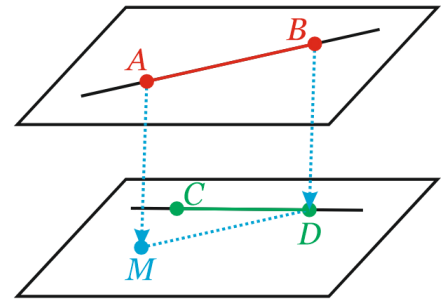
3) Воспользуемся формулой для нахождения расстояния.

$$\rho = \frac{|A \cdot x_{T.A} + B \cdot y_{T.A} + C \cdot z_{T.A} + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Алгоритм нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми

1. Найти координаты точек, задающих прямые (назовём эти прямые AB и CD , тогда нужно найти координаты точек A, B, C, D).
2. Перенести параллельным переносом отрезок AB так, чтобы один из его концов (A или B) совпал с одним из концов другого отрезка (C или D). Найти координаты другого конца перенесённого отрезка (назовём этот другой конец M).
3. Найти расстояние от точки A (или точки B) до плоскости CDM (составить уравнение плоскости и воспользоваться формулой из предыдущего алгоритма). Это и будет расстоянием между скрещивающимися прямыми.



Зная координаты A, B и D , можно найти сначала координаты вектора $\overrightarrow{BD}$, а затем, прибавив их к координатам точки A , получить координаты M

Пример решения задачи по алгоритму

$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $\angle ACB = 90^\circ$, AA_1C_1C – квадрат, $AC = 4$, $BC = 7$. Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 .

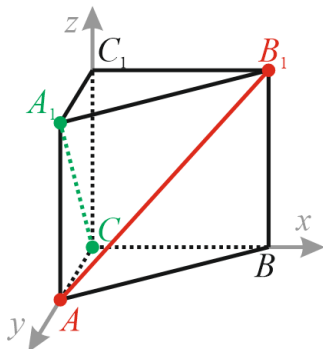


Рис. 1. К условию задачи

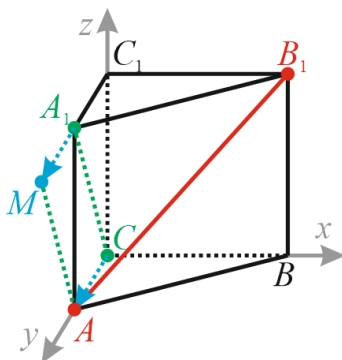


Рис. 2. К пункту №2 решения

- 1) Найдём координаты точек, задающих прямые:

$$A(0; 4; 0), B_1(7; 0; 4); C(0; 0; 0); A_1(0; 4; 4).$$

- 2) Перенесём отрезок A_1C на вектор $\overrightarrow{CA}$ (так, чтобы точка C совместилась с точкой A , см. рис. 2). Мы получим плоскость B_1AM , параллельную A_1C , до которой надо будет найти расстояние либо от точки A_1 , либо от точки C . Это расстояние и будет ответом.

$$\overrightarrow{CA}(0; 4; 0);$$

$$x_M = x_{A_1} + x_{\overrightarrow{CA}} = 0 + 0 = 0;$$

$$y_M = y_{A_1} + y_{\overrightarrow{CA}} = 4 + 4 = 8;$$

$$z_M = z_{A_1} + z_{\overrightarrow{CA}} = 4 + 0 = 4.$$

Таким образом, $M(0; 8; 4)$.

- 3) Найдём расстояние от точки $C(0; 0; 0)$ до плоскости B_1AM .

Составим уравнение плоскости B_1AM . Подставим координаты точек B_1, A, M в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Плоскость не проходит через начало координат, поэтому $D \neq 0$. Примем $D = 1$:

$$\begin{cases} B_1: 7A + 0B + 4C + 1 = 0 \\ A: 0A + 4B + 0C + 1 = 0 \\ M: 0A + 8B + 4C + 1 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{или, по-человечески,} \\ 7A + 4C + 1 = 0 \\ 4B + 1 = 0 \\ 8B + 4C + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Находим, что $B = -\frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{4}$; $A = -\frac{2}{7}$. Уравнение плоскости:

$-\frac{2}{7}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + 1 = 0$. Домножим уравнение на НОК(7; 4) = 28, чтобы коэффициенты стали целыми: $-8x - 7y + 7z + 28 = 0$.

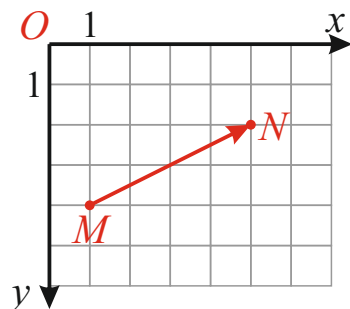
Искомое расстояние:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{|A \cdot x_{T.C} + B \cdot y_{T.C} + C \cdot z_{T.C} + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|0 + 0 + 0 + 28|}{\sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + 7^2}} = \frac{28}{\sqrt{162}} \\ &= \frac{28}{\sqrt{81 \cdot 2}} = \frac{28}{9\sqrt{2}} = \frac{28 \cdot \sqrt{2}}{9\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{28\sqrt{2}}{9 \cdot 2} = \frac{14\sqrt{2}}{9}. \end{aligned}$$

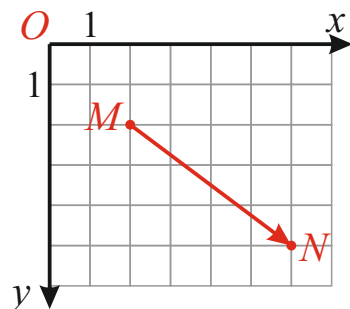
Ответ: $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

Примечание. Можно было и $\frac{28}{\sqrt{162}}$ оставить, но лучше упростить.

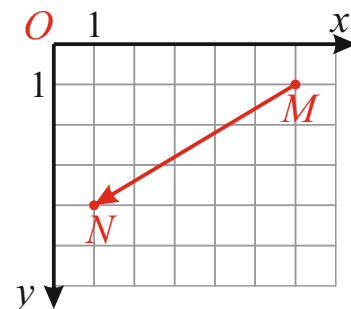
1. Найдите координаты вектора $\vec{MN}$.



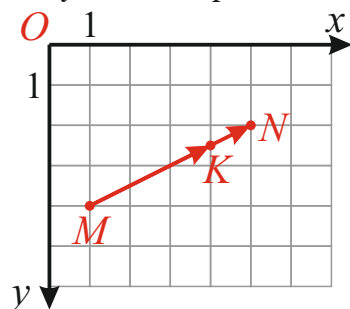
2. Найдите координаты вектора $\vec{MN}$.



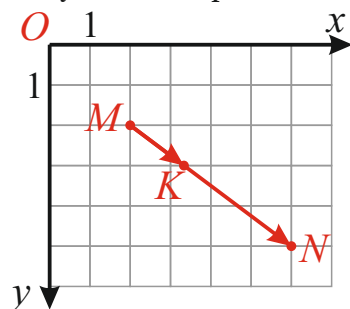
3. Найдите координаты вектора $\vec{MN}$.



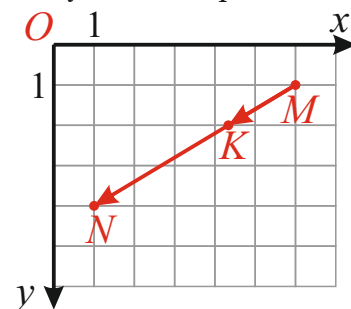
4. На какое число нужно умножить вектор $\vec{MN}$, чтобы получить вектор $\vec{MK}$?



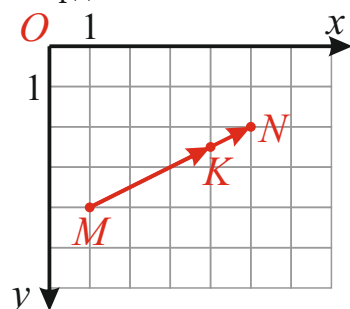
5. На какое число нужно умножить вектор $\vec{MN}$, чтобы получить вектор $\vec{MK}$?



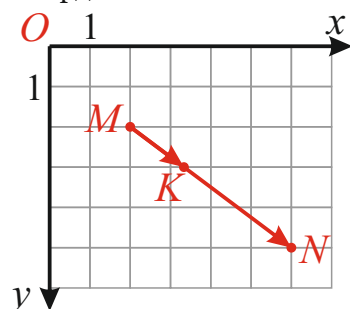
6. На какое число нужно умножить вектор $\vec{MN}$, чтобы получить вектор $\vec{MK}$?



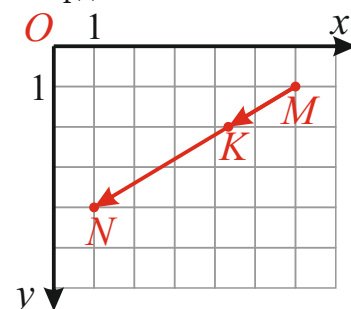
7. Найдите координаты вектора $\vec{MK}$, а затем координаты точки K.



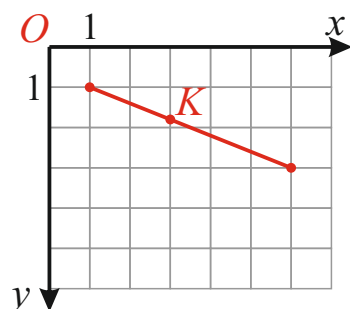
8. Найдите координаты вектора $\vec{MK}$, а затем координаты точки K.



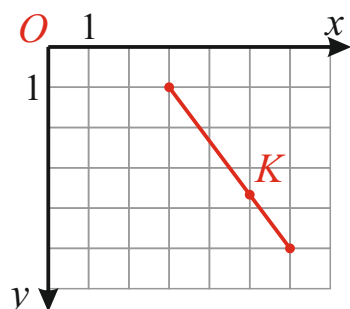
9. Найдите координаты вектора $\vec{MK}$, а затем координаты точки K.



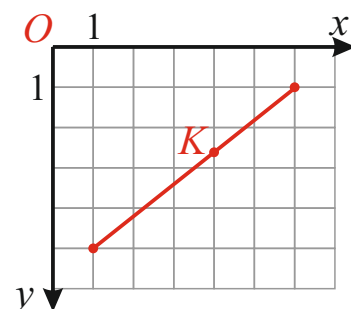
10. Найдите координаты точки K.



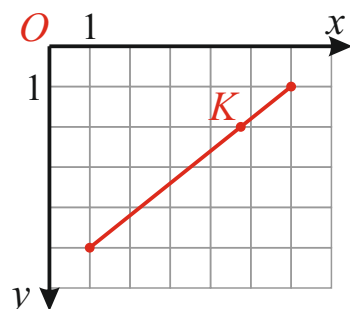
11. Найдите координаты точки K.



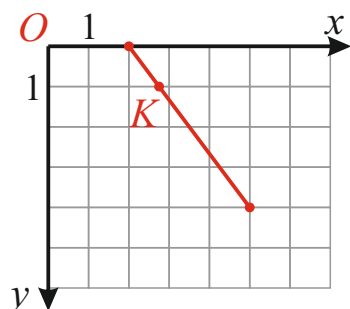
12. Найдите координаты точки K.



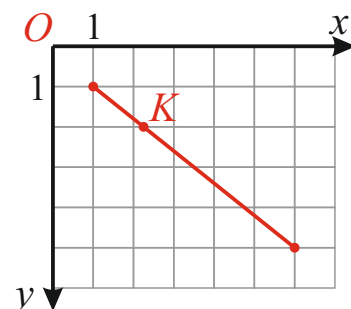
13. Найдите координаты точки K.



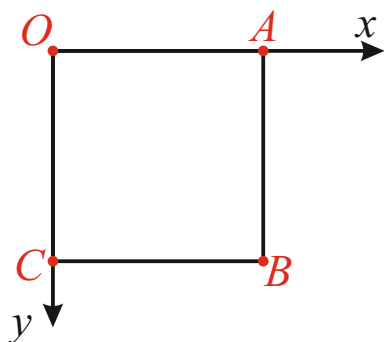
14. Найдите координаты точки K.



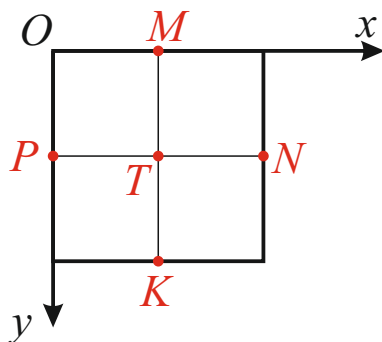
15. Найдите координаты точки K.



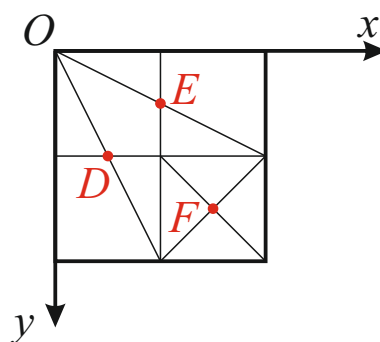
1. Сторона квадрата $OABC$ равна 12. Найдите координаты точек O, A, B, C .



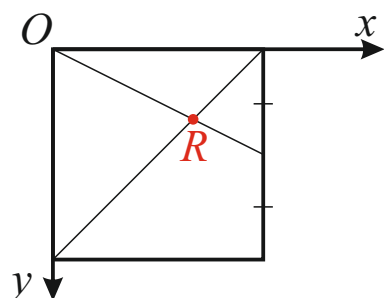
2. Сторона самого большого квадрата равна 12. Найдите координаты точек M, N, K, P, T .



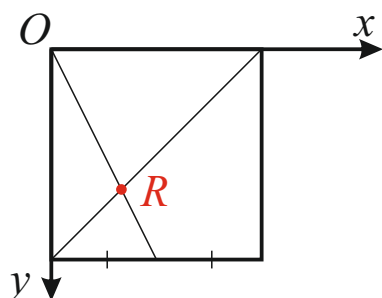
3. Сторона самого большого квадрата равна 12. Найдите координаты точек D, E, F .



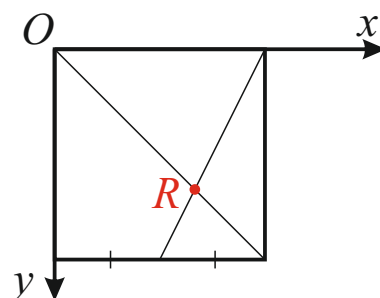
4. Сторона квадрата равна 12. Найдите координаты точки R .



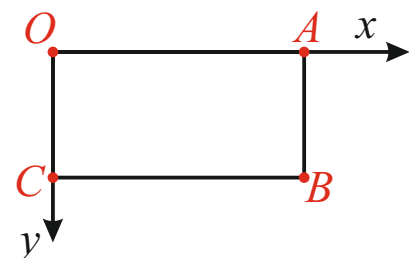
5. Сторона квадрата равна 12. Найдите координаты точки R .



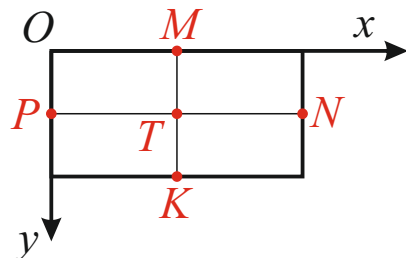
6. Сторона квадрата равна 12. Найдите координаты точки R .



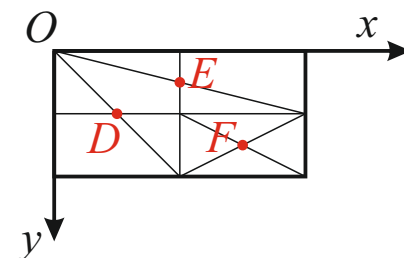
7. Стороны прямоугольника $OABC$ равны 12 и 6. Найдите координаты точек O, A, B, C .



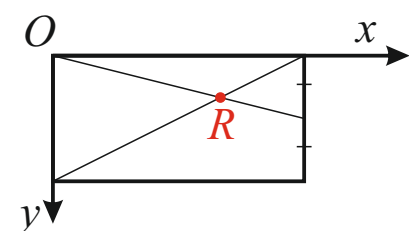
8. Стороны самого большого прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точек M, N, K, P, T .



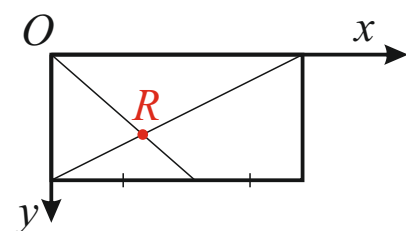
9. Стороны самого большого прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точек D, E, F .



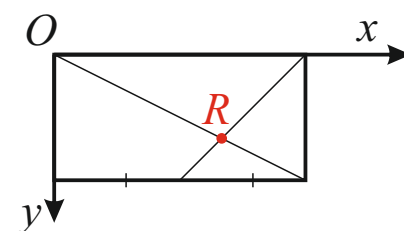
10. Стороны прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точки R .



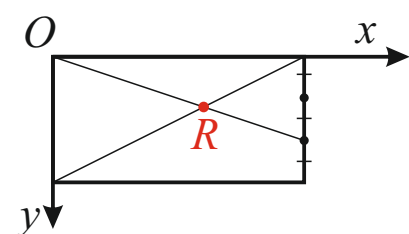
11. Стороны прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точки R .



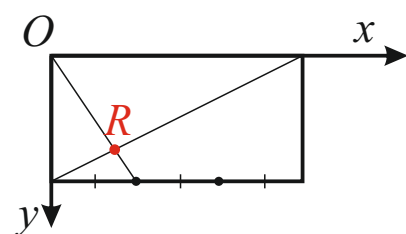
12. Стороны прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точки R .



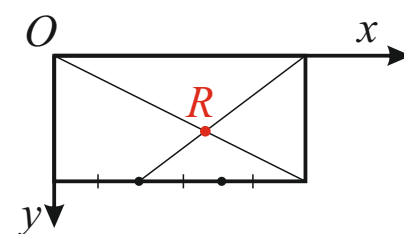
13. Стороны прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точки R .



14. Стороны прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точки R .



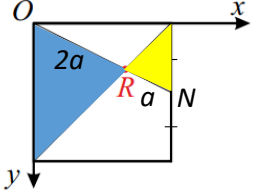
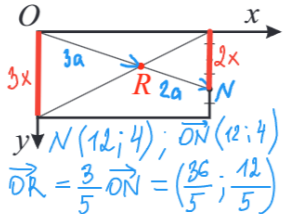
15. Стороны прямоугольника равны 12 и 6. Найдите координаты точки R .



Ответы к части 1. Координаты точки, не лежащей в узлах сетки

1	$M(1; 4); N(5; 2); \overrightarrow{MN} = (5 - 1; 2 - 4) = (4; -2)$ Ответ: $(4; -2)$.
2	$M(2; 2); N(6; 5); \overrightarrow{MN} = (6 - 2; 5 - 2) = (4; 3)$ Ответ: $(4; 3)$.
3	$M(6; 1); N(1; 4); \overrightarrow{MN} = (1 - 6; 4 - 1) = (-5; 3)$ Ответ: $(-5; 3)$.
4	$\frac{3}{4}$
5	$\frac{1}{3}$
6	$\frac{1}{3}$
7	$\overrightarrow{MN} = (4; -2); \overrightarrow{MK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4} \cdot 4; \frac{3}{4} \cdot (-2)\right) = \left(3; -\frac{3}{2}\right)$ $x_K = x_M + x_{\overrightarrow{MK}} = 1 + 3 = 4$ $y_K = y_M + y_{\overrightarrow{MK}} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ Ответ: $\overrightarrow{MK} \left(3; -\frac{3}{2}\right); K \left(4; \frac{5}{2}\right)$.
8	$\overrightarrow{MN} = (4; 3); \overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3} \cdot 4; \frac{1}{3} \cdot 3\right) = \left(\frac{4}{3}; 1\right)$ $x_K = x_M + x_{\overrightarrow{MK}} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$ $y_K = y_M + y_{\overrightarrow{MK}} = 2 + 1 = 3$ Ответ: $\overrightarrow{MK} \left(\frac{4}{3}; 1\right); K \left(\frac{10}{3}; 3\right)$.
9	$\overrightarrow{MN} = (-5; 3); \overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{3} \cdot (-5); \frac{1}{3} \cdot 3\right) = \left(-\frac{5}{3}; 1\right)$ $x_K = x_M + x_{\overrightarrow{MK}} = 6 - \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$ $y_K = y_M + y_{\overrightarrow{MK}} = 1 + 1 = 2$ Ответ: $\overrightarrow{MK} \left(-\frac{5}{3}; 1\right); K \left(\frac{13}{3}; 2\right)$.
10	$\left(3; \frac{9}{5}\right)$ – решение аналогично задачам 7-9 выше
11	$\left(5; \frac{11}{3}\right)$ – решение аналогично задачам 7-9 выше
12	$\left(4; \frac{13}{5}\right)$ – решение аналогично задачам 7-9 выше
13	$\left(\frac{19}{4}; 2\right)$ – решение аналогично задачам 7-9 выше
14	$\left(\frac{11}{4}; 1\right)$ – решение аналогично задачам 7-9 выше
15	$\left(\frac{9}{4}; 2\right)$ – решение аналогично задачам 7-9 выше

Ответы к части 2. Квадраты, прямоугольники. Точки, лежащие на диагонали

1	$O(0; 0); A(12; 0); B(12; 12); C(0; 12)$
2	$M(6; 0); N(12; 6); K(6; 12); P(0; 6); T(6; 6)$
3	$D(3; 6); E(6; 3); F(9; 9)$
4	4. Сторона квадрата равна 12. Найдите координаты точки R.  Закрашенные треугольники подобны по двум углам, коэффициент подобия 2 (см. отношение сторон этих треугольников, расположенных вертикально), поэтому $OR : RN = 2 : 1$. $N(12; 6); \overrightarrow{ON}(12; 6)$ $\overrightarrow{OR} = \frac{2}{3} \overrightarrow{ON} = \left(\frac{2}{3} \cdot 12; \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = (8; 4)$ $x_R = x_O + x_{\overrightarrow{OR}} = 0 + 8 = 8$ $y_R = y_O + y_{\overrightarrow{OR}} = 0 + 4 = 4$ Ответ: (8; 4).
5	(4; 8)
6	(8; 8)
7	$O(0; 0); A(12; 0); B(12; 6); C(0; 6)$
8	$M(6; 0); N(12; 3); K(6; 6); P(0; 3); T(6; 3)$
9	$D(3; 3); E(6; 1.5); F(8; 4.5)$
10	(8; 2), идея решения аналогична №4
11	(4; 4), идея решения аналогична №4
12	(8; 4), идея решения аналогична №4
13	 $N(12; 4); \overrightarrow{ON}(12; 4)$ $\overrightarrow{OR} = \frac{3}{5} \overrightarrow{ON} = \left(\frac{36}{5}; \frac{12}{5} \right)$ $x_R = x_O + x_{\overrightarrow{OR}} = 0 + \frac{36}{5} = \frac{36}{5}$ $y_R = y_O + y_{\overrightarrow{OR}} = 0 + \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$ Ответ: $\left(\frac{36}{5}; \frac{12}{5} \right)$
14	$\left(3; \frac{9}{2} \right)$, отношение сторон подобных треугольников 3:1
15	$\left(\frac{36}{5}; \frac{18}{5} \right)$, отношение сторон подобных треугольников 3:2

ОЗНАКОМИТЕЛЬНЫЙ ФРАГМЕНТ

КОНЕЦ ОЗНАКОМИТЕЛЬНОГО ФРАГМЕНТА

Спасибо, что познакомились со сборником
«Стереометрия: метод координат».

В ознакомительный фрагмент вошли основные алгоритмы координатного метода, примеры их применения, а также первые части задачника.

В полной версии сборника:

14 последовательных частей задачника — от нахождения координат точек и векторов до сложных стереометрических задач.

- угол между скрещивающимися прямыми;
- угол между плоскостями;
- угол между прямой и плоскостью;
- расстояние от точки до плоскости;
- расстояние между скрещивающимися прямыми.

Также в комплект входят **ответы и подробные решения задач**, позволяющие использовать материал как для самостоятельной подготовки, так и для работы на уроках, консультациях и дополнительных занятиях.

Полная версия сборника на market.school-pro.ru:

купить

Максим Семенихин

school-pro.ru • vk.com/onlinemath